Automated Market Makers y la implementación óptima para CBDCs

Matias Gleser

Segundo Premio / Categoría Estudiantes Universitarios

15° Premio de Investigación Económica

“Dr. Raúl Prebisch” 2023

BANCO CENTRAL
DE LA REPÚBLICA ARGENTINA

Premio Anual de Investigación Económica Dr. Raúl Prebisch
Año 2023
Banco Central de la República Argentina

Automated Market Makers
y la implementación óptima para CBDCs

Matias Gleser

Julio 2023

Palabras clave: Criptomonedas, Política monetaria, Política cambiaria, Monedas digitales, Bancos Centrales
Clasificación JEL: E42, E44, E52, E58

1 Resumen

La creación de Bitcoin en el año 2008 probó la posibilidad de crear dinero virtual respaldado solo por la confianza en el algoritmo de emisión y no en una autoridad monetaria central. Además, la tecnología *blockchain* para el registro de transacciones se popularizó y generó innovaciones en su aplicación. La mayor de las ya mencionadas innovaciones llegó con Ethereum en el año 2014, una *blockchain* que no solo soportaba a su criptomoneda (Ether) sino también la creación de contratos inteligentes.

Los contratos inteligentes en Ethereum encontraron rápidamente aplicaciones en la creación de criptomonedas estables o *Stablecoins*[1] y posteriormente mercados descentralizados para el intercambio de criptomonedas. Estos mercados descentralizados se encontraron con el problema de no poder replicar los mecanismos utilizados en el sistema financiero tradicional, en particular el libro de órdenes[2], y tuvieron que recurrir a algoritmos en la búsqueda de soluciones. De esta búsqueda surgieron los hacedores de mercado automatizados (en adelante AMMs por *Automated Market Makers*) capaces de proveer liquidez a un precio fijado de forma algorítmica.

Con posterioridad, múltiples tipos de AMMs fueron diseñados, cada uno con propiedades particulares, en el intento de proveer la solución definitiva al intercambio anónimo en sistemas sin autoridad central.

A la par del crecimiento y la llegada al público masivo de las criptomonedas y las aplicaciones para las mismas basadas en la tecnología *blockchain*, los gobiernos del mundo y en particular sus bancos centrales comenzaron a explorar la posibilidad de basar sus economías en las llamadas Monedas Digitales de Bancos Centrales (en adelante CBDCs por *Central Bank Digital Currencies*).

El presente trabajo tiene como objetivo exponer los principales tipos de algoritmos puestos en funcionamiento, remarcar algunas de sus propiedades y finalmente proponer el uso de una implementación particular para las monedas virtuales de los bancos centrales que permita un cierto grado de libertad en la determinación de la política monetaria, en particular en lo que refiere a la política cambiaria.

[1] Ver Fissore Navarro (2021) para una descripción completa de los tipos *Stablecoins* y sus características.

[2] Se entiende por libro de órdenes a la lista de operaciones realizadas en un mercado financiero que incluye las cantidades ofrecidas y demandadas a los distintos precios designados por los participantes del mercado.

Índice General

2 Introducción

Con el surgimiento de Bitcoin en el año 2008 (Nakamoto, 2008), la tecnología *blockchain* probó la posibilidad de crear criptomonedas cuyo valor se ve respaldado no por la confianza, como en el caso de las monedas fiduciarias, sino por el algoritmo que determina su emisión. La eliminación de la necesidad de una autoridad monetaria competente llevó al aumento de la confianza y el uso de las criptomonedas para transferencias a escala global, aunque su enorme volatilidad aún no permitió una adopción masiva.

La siguiente gran innovación llegó con la creación de Ethereum (Buterin, 2014) que añadió programabilidad a las transferencias de valor a través de los llamados contratos inteligentes o *smart contracts*. Los contratos inteligentes fueron utilizados en un primer momento para la implementación de *Stablecoins* y luego con el tiempo de mercados descentralizados (en adelante Dexes por *decentralized exchanges*). Estos primeros Dexes seguían un modelo innovador y muy distinto al existente en los mercados financieros tradicionales, donde el intercambio no se realiza de par a par sino a través de una tercera parte llamada intermediario que cobra una comisión por el servicio de "creación de mercado". Un ejemplo claro de este sistema es la compra de moneda extranjera a un banco comercial. En esta, una parte A que busca hacerse de dólares, se los compra al banco al llamado "precio de venta" pagando con pesos argentinos y el banco posteriormente vende estos dólares a la contraparte B al llamado "precio de compra" que es mayor al precio de venta. De este modo, al finalizar la transacción, el banco comercial posee el mismo balance que al comenzar la transacción más la diferencia entre el precio de compra y el precio de venta. Este ejemplo se ve resumido en la Figura 1.

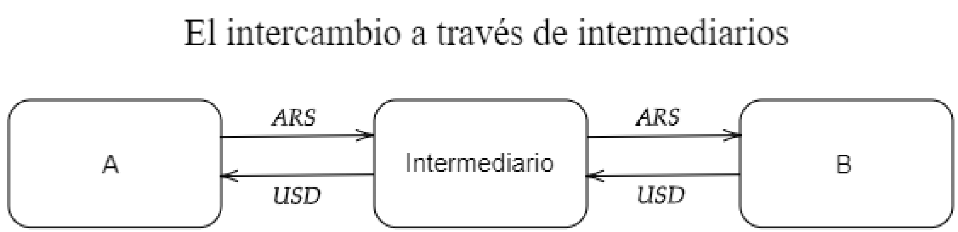

Figura 1: Ilustración de elaboración propia.

Sin embargo, el sistema más utilizado para el intercambio en mercados financieros es el llamado "libro de órdenes" que difiere levemente del ejemplo anterior. En este último se tiene, para un cierto activo, el registro del interés de mercado en forma de cantidades ofrecidas con el precio pedido y cantidades demandadas conjuntamente con el precio correspondiente teniendo algo como en la Figura 2.

El libro de órdenes

Size	Bid	Ask	Size
16	$13.45	$13.80	20
30	$13.41	$13.83	60
43.5K	$13.35	$13.87	27
30	$13.34	$13.90	300

Figura 2: Extraído de Yahoo Finance.

El sistema de órdenes resultaría una forma natural de eliminar al intermediario y proveer una solución al intercambio en redes descentralizadas como Ethereum. Sin embargo, las comisiones que se deben pagar a los mineros para registrar transacciones en la *blockchain* impidieron que este sistema fuera exportado de forma exitosa[3].

La solución al intercambio descentralizado que tendría éxito fue propuesta por Adams (2018) en un proyecto llamado Uniswap[4]. Uniswap fue el primer *exchange* descentralizado en usar un sistema de *pools de liquidez* en el que los proveedores de liquidez (en adelante LPs por *Liquidity Providers*) depositan un par de tokens al *smart contract* de modo que otros *traders* puedan intercambiar este par de tokens a un precio fijado de forma algorítmica.

Los LPs se ven incentivados a proveer liquidez al smart contract para quedarse con una parte del valor que intercambian los traders en forma de comisiones. De modo resumido puede verse el funcionamiento de este tipo de Dex en la Figura 3. Se observa como un LP envía un par de monedas al Dex (en este caso ARS y USD) y recibe a cambio LP *tokens* que sirven para reclamar su depósito en el futuro. En una segunda instancia, un *trader* A interactúa con el Dex para intercambiar sus ARS por USD del stock en poder del Dex y paga una comisión γ que es enviada al LP.

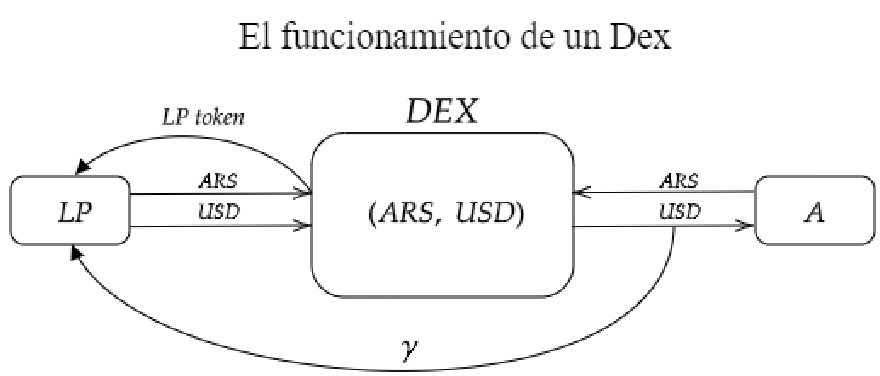

Figura 3: Ilustración de elaboración propia.

Debido a que en este caso la determinación del precio de los activos no es llevada a cabo por la concurrencia de oferta y demanda como en el libro de órdenes, sino a través de un algoritmo, este

[3]Sobre el fallido intento de implementar un libro de órdenes en una *blockchain* ver Bruhwiler et al. (2021).

[4]Actualizado en 2021 a Adams et al. (2021).

tipo de Dexes recibieron el nombre de Hacedores de Mercado Automatizados o ***Automated Market Makers***.

El volumen total de liquidez depositada (en adelante TVL por *Total Value Locked*) en Uniswap y otros Dexes puede verse en las Figuras 4 y 5.

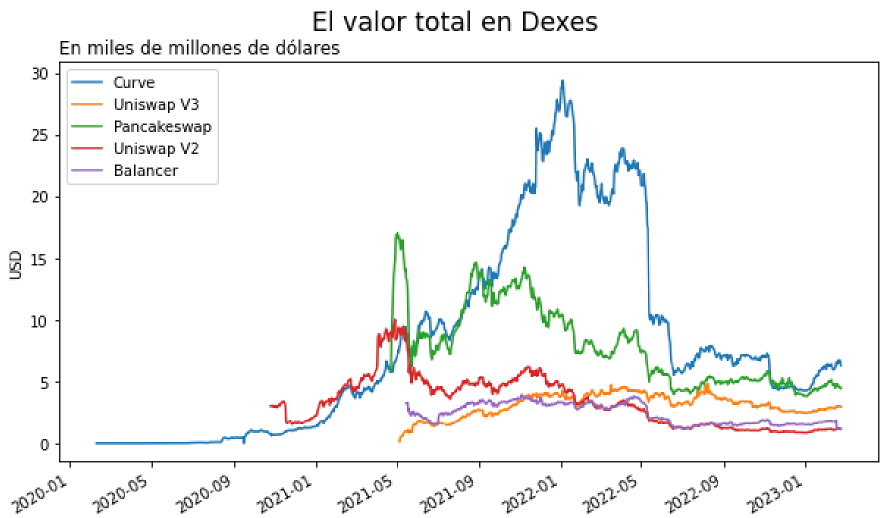

Figura 4: Elaboración propia en base a los datos de DefiLlama.com.

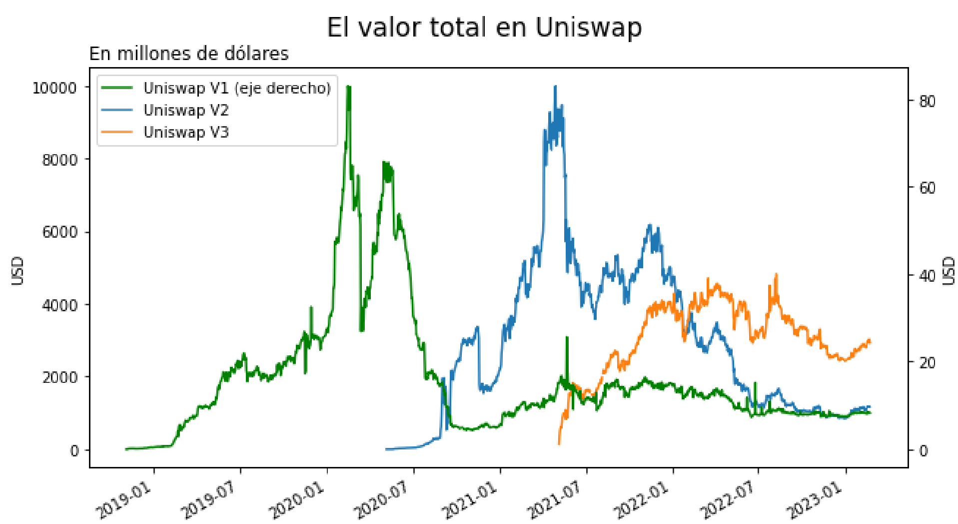

Figura 5: Elaboración propia en base a los datos de DefiLlama.com.

Se observa claramente cómo un crecimiento del TVL en los principales Dexes a tasas exponenciales en el período 2020-2022 y una gran caída en el año 2023 debida mayormente al efecto precio y la caída del precio de los activos. La Figura 5 muestra el cambio de TVL en el Dex más popular de Ethereum en sus distintas versiones; en la última, por ejemplo, se incorporó pools de liquidez múltiples para un mismo par de modo de poder cobrar comisiones menores en activos más estables (*Stablecoins* por ejemplo) y mayores en activos volatiles y poco líquidos (Adams et al., 2021).

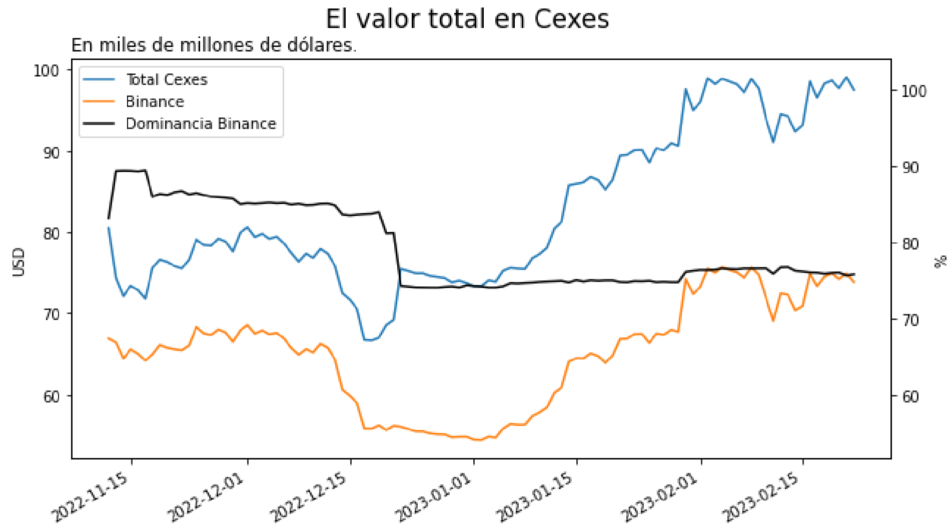

Figura 6: Elaboración propia en base a los datos de DefiLlama.com,

Desde su implementación los Dexes compitieron con los mercados centralizados (en adelante Cexes por *Centralized Exchanges*) de criptomonedas (e.g. Binance, OKX, Coinbase, étc.) y año tras año aumentaron el volumen de transacciones que realizaban así como la liquidez de los protocolos medida por TVL[5] (Ver Figuras 6 y 7). Los Cexes son, por definición, centralizados y exponen al trader al riesgo de contraparte. Además, dentro del propio mercado se observa una enorme concentración en manos de Binance; dicho Cex poseía alrededor del 90% del TVL en exchanges centralizados a finales de 2022, viéndose reducido a menos del 80% en febrero del 2023.

Si bien no se tienen datos públicos del TVL en plataformas centralizadas anteriores a Noviembre de 2022, se observa cómo, desde el momento en que se tiene disponibilidad de datos, el valor concentrado en Cexes más que duplica al TVL en Dexes. Aun así, alcanzar los 100 mil millones de dólares de TVL en tan solo 2 años desde la impementación del primer Dex, es indicativo de la gran adopción de dichas tecnologías.

El crecimiento de este tipo de plataformas implica la necesidad de investigar las propiedades de los distintos algoritmos puestos en funcionamiento, así como sus potenciales usos en el campo de la política económica ya que no solo las criptomonedas están alcanzando masivamente al público sino que los propios gobiernos están considerando tornar sus economías hacia el dinero virtual en forma de las llamadas CBDCs (Central Bank Digital Currencies).

Por lo anterior, trataremos de responder las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Son los *market makers* automatizados exportables a las monedas digitales de bancos centrales?
- ¿Cuales son sus implicancias para la política monetaria?

[5]Los datos son públicos a partir de finales del año 2022.

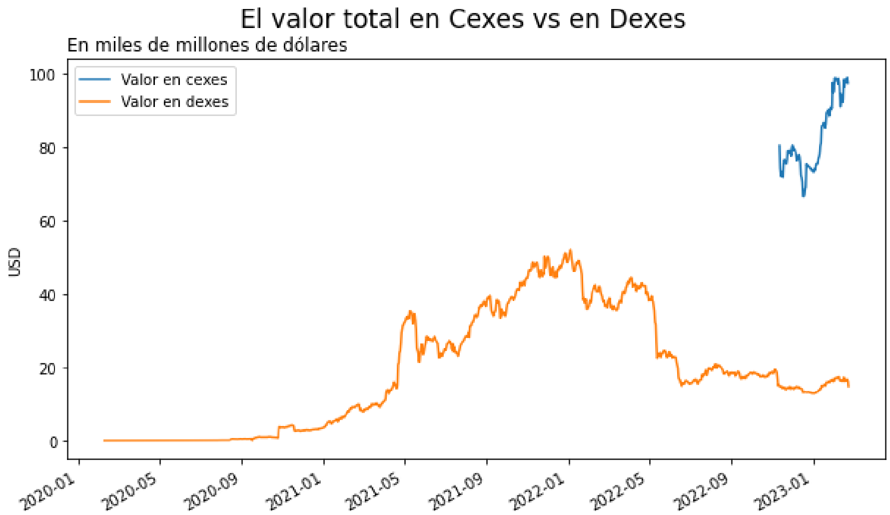

Figura 7: Elaboración propia en base a los datos de DefiLlama.com.

3 El modelo

En el presente trabajo nos limitaremos a analizar el caso de los *Constant Function Market Makers* (CFFMs), un tipo de AMMs con la propiedad de ser completamente determinados por una función que relaciona las cantidades de los distintos activos en poder del AMM. Siguiendo a Angeris and Chitra (2020), presentamos la definición formal de un CFMM:

Definición 1 (Constant Function Market Maker) *Un CFMM es un tipo de AMM definido por su función de reserva* $\varphi : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *que mapea la terna* $(\mathbf{R}, \Lambda, \Delta)$ *a un número real. Donde el vector* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n_+$ *denota las reservas de los* n *activos en posesión del AMM,* $\Delta \in \mathbb{R}^n_+$ *las monedas que un trader envía a este y* $\Lambda \in \mathbb{R}^n_+$ *las monedas que este envía al trader.*

La componente i-ésima del vector $\mathbf{R}$, denotada por R_i, indica las reservas del activo i en posesión del CFMM las cuáles son válidas para realizar un *trade*. El *output* del *trade* $\Lambda \in \mathbb{R}^n_+$ es un vector no negativo, donde su i-ésima componente Λ_i indica la cantidad de la moneda i que el *trader* recibe del CFMM. Se define además al *input* $\Delta \in \mathbb{R}^n_+$ como el vector cuyo componente i-ésimo, Δ_i indica la cantidad de la moneda i que el trader envía al CFMM. Suponiendo por ejemplo, un CFMM con reservas en pesos y dólares, $\mathbf{R} = (ARS, USD) = (800, 2)$, que fija un precio tal que $400ARS = 1USD$ y una *trader* Alicia que busca intercambiar 400 ARS por 1 USD se tendría:

$$(\mathbf{R}, \Lambda, \Delta) = [(800, 2), (0, 1), (400, 0)]$$

En adelante llamaremos *trade* al par $(\Lambda, \Delta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$. Resulta lógico que no cualquier *trade* puede ser considerado válido, por ejemplo, un trade que busca extraer una cantidad positiva de alguna moneda sin enviar ningún activo al AMM no debería nunca ser llevado a cabo. Por esta razón un CFMM tendrá que satisfacer siempre la siguiente **condición de validez**:

Definición 2 (Condición de validez) *Un CFMM caracterizado por su función de reserva* $\varphi(\cdot)$ *considerará un trade como válido y será ejecutado cuando satisface:*

$$\varphi(\mathbf{R}, \Lambda, \Delta) = \varphi(\mathbf{R}, 0, 0) \tag{1}$$

Es decir, un *trade* será válido sí y solo sí no modifica la función de reserva. De este modo, las reservas en posesión del CFMM se actualizan luego de un trade en base a:

$$\mathbf{R}' \leftarrow \mathbf{R} - \Lambda + \Delta \tag{2}$$

A partir de esta definición formal veremos los tres casos de Market Makers más relevantes: de suma constante, de producto constante y de media constante. En estos tres casos se verifica que $\varphi(\cdot)$ es creciente y contínuamente diferenciable en todos sus argumentos, por lo tanto se tiene una noción bien definida de precio marginal[6].

El vector de precios que reporta el CFMM puede obtenerse haciendo uso del Teorema de la Función Implícita (TFI). Para ver esto, se define $x_i = R_i - \Lambda_i + \Delta_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, se tendrá entonces que para $i \neq j$:

$$dx_j P_j = P_i dx_i \tag{3}$$

reacomodando términos obtenemos:

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{P_i}{P_j} \tag{4}$$

pero por el TFI se tiene que:

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}} \tag{5}$$

por lo que combinando (4) con (5), para un CFMM con función de reserva φ, el vector de precios será:

$$\mathbf{P} = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) \tag{6}$$

Además, pueden tomarse los precios relativos multiplicando por un numerario λ. De este modo, definiendo a $\mathbf{p}$ como el vector de precios relativos en términos de la moneda 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1}{(\nabla \varphi)_1} \mathbf{P} = \lambda_1 \nabla \varphi \\ &= \left(\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) \\ &= (1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned} \tag{7}$$

Estos precios cumplen con la propiedad de no arbitraje con un mercado de referencia[7]. Hasta ahora se presentó implícitamente el caso de CFMM que no cobra comisiones por transaccionar con

[6] Por precio marginal nos referimos al diferencial de la función de reserva respecto de uno de sus argumentos, el cual nos permite calcular precios relativos para todas las monedas en poder del CFMM.

[7] La demostración puede verse en Angeris et al. (2019) y Angeris and Chitra (2020).

él mismo. Sin embargo, lo usual es cobrar comisiones a los traders que interactuen con el CFMM de modo de recompensar a los LPs. Suponiendo ahora que el CFMM cobra una comisión a la tasa $(1-\gamma)$ en forma del activo que el trader deposita al CFMM, la condición de validez del trade será:

$$\varphi\left(\mathbf{R}, \gamma\Lambda, \Delta\right) = \varphi\left(\mathbf{R}, 0, 0\right) \tag{8}$$

Además, en el caso del CFMM con comisiones $(1-\gamma)$ los precios se desvían a lo sumo en un porcentaje idéntico a la tasa de comisiones del precio vigente en un mercado de referencia (Angeris et al., 2019). Es decir, el precio reportado por el AMM será:

$$\gamma\mathbf{p} \leq \mathbf{r} \leq \gamma^{-1}\mathbf{p} \tag{9}$$

en que $\mathbf{r}$ representa el vector de precios del mercado de referencia.

A continuación, especificamos los tres tipos de CFMM más comunes y algunas de sus propiedades más relevantes.

3.1 Market Makers de suma constante

En el caso de un AMM de suma constante con n activos, la función de reserva tiene la forma de:

$$A_{cs}\left(\mathbf{X}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i (R_i - \Lambda_i + \Delta_i) = D \tag{10}$$

en la que se toma la suma ponderada de los distintos activos y se iguala al valor inicial de la suma ponderada por los mismos pesos de las reservas. En este caso, haciendo uso de (7) se observa que el vector de precios marginales será de la forma:

$$\mathbf{p}_{cs} = \left(1, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_n}{a_1}\right) \tag{11}$$

en que el subíndice cs indica que nos referimos al ***constant sum*** AMM. Como puede observarse, el vector de precios relativos no depende de la cantidad de reservas en poder del CFMM y en cambio permanecen constantes para cualquier valor de $\mathbf{R}$. Además, de (10) se sigue que:

$$x_i = \frac{D}{a_i} - \sum_{j \neq i} \frac{a_j x_j}{a_i} \tag{12}$$

y, por lo tanto, las reservas de una moneda i pueden llegar a cero en caso de que las reservas de los activos $j \neq i$ aumentaran lo suficiente. La posibilidad de drenar a este tipo de AMM de un subconjunto de los activos en su poder es la principal razón de que en la actualidad no existan Dexes que utilicen este tipo de algoritmo.

La función de reserva de un AMM de suma constante con dos activos (x_1 y x_2) y reservas iniciales $\mathbf{R} = (1, 1)$ puede verse de forma gráfica en la Figura 8 para distintos valores del ponderador a_2 con $a_1 = 1$ fijo. Se observa como para distintos valores de a_2 se tiene una curva única con distinta pendiente a las demás que, sin embargo, permanece constante para todos los valores de las monedas (x_1, x_2).

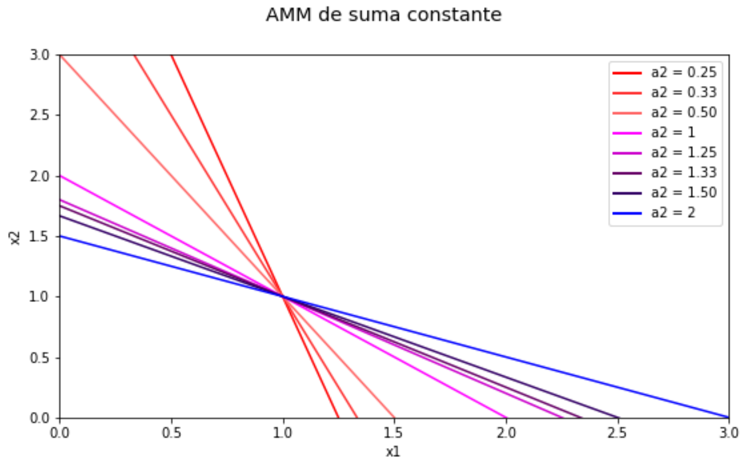

Figura 8: Elaboración propia.

3.2 Market Makers de producto constante

Para un AMM de n activos, la función de reserva tiene la forma de:

$$A_{cp}\left(\mathbf{X}\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} (R_i - \Lambda_i + \Delta_i) = k \tag{13}$$

en que k es un parámetro mayor que cero. En este caso, como veremos, al estar definida la función de reserva como un producto, ningún *trade* que lleve las reservas de un activo a cero será válido.

Diferenciando y usando (7) se obtiene el vector de precios reportados que será:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{cp} &= \left(1, \frac{\prod_{i \neq 2} x_i}{\prod_{j \neq 1} x_j}, \ldots, \frac{\prod_{i \neq n} x_i}{\prod_{j \neq 1} x_j}\right) \\ &= \left(1, \frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{x_1}{x_n}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

en que el subíndice cp indica que nos referimos al ***constant product*** AMM. A diferencia del caso anterior, se observa cómo los precios sí dependen de las cantidades. Por (13) se sigue que:

$$x_i = \frac{k}{\prod_{j \neq i} x_j} \tag{15}$$

y, por lo tanto, que las reservas del activo i sean cero requiere cantidades arbitrariamente grandes del resto de los activos lo cual asegura una propiedad llamada de **liquidez permanente**. Lo anterior es idéntico a decir que el precio del activo i en términos de otro activo j tiende a infinito cuando x_i tiende a cero.

El caso de un AMM de producto constante con 2 activos y reservas iniciales $\mathbf{R} = (x_1, x_2)$ puede verse de forma gráfica en la Figura 9. En esta se observa cómo las cantidades del activo x_1 tienden a infinito cuando las del activo x_2 tienden a cero.

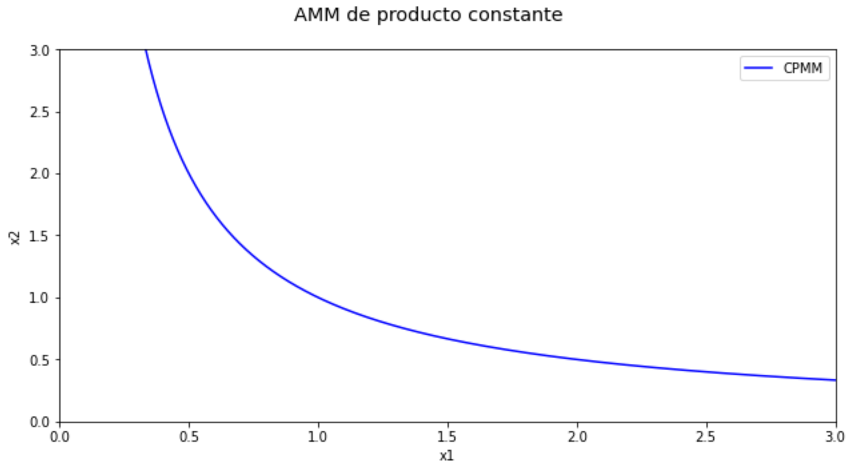

Figura 9: Elaboración propia.

3.3 Market Makers de media constante

El AMM de media constante constituye una generalización de los AMM de producto constante en la que se permite darles pesos distintos a los distintos activos. Estos AMMs se caracterizan por una función de reserva de la forma:

$$A_{cm}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i} = \prod_{i=1}^{n} (R_i - \Lambda_i + \Delta_i)^{w_i} = k \tag{16}$$

con ponderadores $w_i > 0$ para todo i. En este caso, diferenciando, se obtiene un vector de precios de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{cm} &= \left(1, \frac{w_2}{x_2}\frac{x_1}{w_1}\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}}{\prod_{j=1} x_j^{w_j}}, \ldots, \frac{w_2}{x_2}\frac{x_1}{w_1}\frac{\prod_{i=1} x_i^{w_i}}{\prod_{j=1} x_j^{w_j}}\right) \\ &= \left(1, \frac{w_2}{w_1}\frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{w_n}{w_1}\frac{x_1}{x_n}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

en que el subíndice cm indica que nos referimos al ***constant mean*** AMM. El caso de los AMM de media constante es idéntico al caso de los de producto constante en que aseguran la propiedad de liquidez permanente ya que en base a (16) se ve que para una moneda cualquiera i:

$$x_i = \left(\frac{k}{\prod_{j \neq i} x_j^{w_j}}\right)^{\frac{1}{w_i}} \tag{18}$$

que requiere cantidades arbitrariamente grandes del resto de las monedas para tender a cero. El caso de un AMM de producto constante con 2 activos puede verse de forma gráfica en la Figura 10 para distintos valores de w_2 con $w_1 = 1$ fijo.

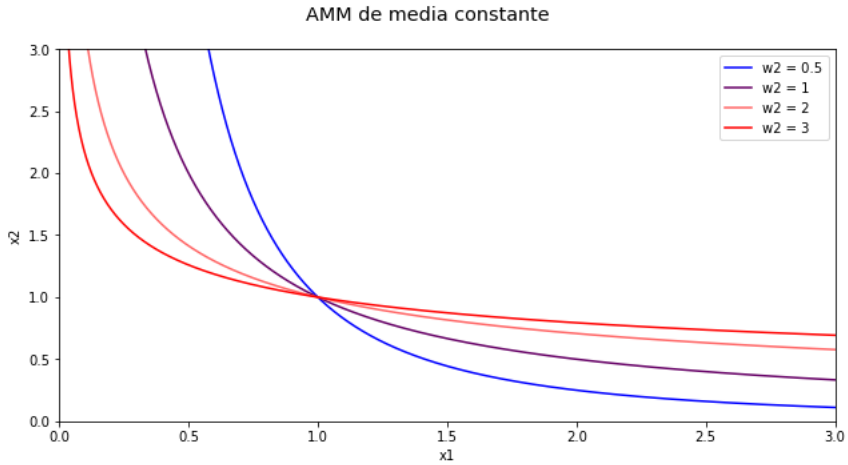

Figura 10: Elaboración propia.

4 Central Bank Digital Currencies

Por el aumento de la popularidad de las criptomonedas y el creciente marco de investigación sobre sus propiedades, un gran conjunto de bancos centrales de todo el mundo (e.g. Banco Popular de China, Reserva Federal, Banco Europeo, etc.) han planteado la posibilidad de mover sus economías hacia la eliminación del dinero en efectivo y la implementación en su lugar de monedas digitales[8].

Los bancos centrales son conscientes de que la implementación de las CBDCs sería en vano si fuera eclipsada por el uso de dinero virtual privado (Davoodalhosseini et al., 2020). Sin embargo, la implementación de CBDCs tendría amplios beneficios permitiendo los pagos y transferencia de valor a escala global a mayor seguridad y costos potencialmente menores a los de los sistemas de pagos tradicionales; estas permitirían además disminuir la evasión impositiva y aumentar la transparencia.

Desde su surgimiento conceptual distintos autores han explorado las potenciales ventajas de las CBDCs en el campo de la política monetaria, por ejemplo, Demaio et al. (2022) proponen un sistema de bancos centrales regionales independientes que, vía la implementación de una CBDC, se controlan mutuamente y acaban reduciendo la dominancia fiscal ya que incorporan un mayor grado de descentralización en la emisión monetaria.

4.1 El AMM óptimo para la implementación de CBDCs con política monetaria

Uno de los principales desafios de la implementación de una CBDC sería el establecimiento de un mercado de cambios con el resto de las monedas del mundo que retenga la posibilidad de realizar política monetaria por parte del banco central emisor.

Utilizando la homotopía ideada por Port and Tiruviluamala (2022) a través de la forma:

$$A_{hom}\left(\mathbf{X}\right) = (1-t)\frac{D}{A_{cs}\left(\mathbf{X}\right)} + t\left[\frac{k}{A_{cp}\left(\mathbf{X}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} = 1 \tag{19}$$

[8]Ver Ward and Rochemont (2019) para un resumen de las propiedades de las CBDCs.

la cual parametriza con t una combinación de $A_{cs}(\mathbf{X})$ y $A_{cp}(\mathbf{X})$ tal que para todo valor de $\mathbf{X}$, el valor de $A_{hom}(\mathbf{X})$ se encuentra exactamente a $t\%$ entre las curvas del CSMM y del CPMM. Esta construcción tiene la propiedad de que para $t = 0$:

$$\begin{aligned} A_{hom}\left(\mathbf{X}; t=0\right) = \frac{D}{A_{cs}(\mathbf{X})} = 1 \\ D = A_{cs}(\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{20}$$

que es idéntico a (10). En el caso contrario, fijando $t = 1$, (19) se reduce a:

$$\begin{aligned} A_{hom}\left(\mathbf{X}; t=1\right) = \frac{k}{A_{cp}(\mathbf{X})} = 1 \\ k = A_{cp}(\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{21}$$

que es idéntico a (13). Por lo tanto, con esta construcción se tiene la posibilidad de tener una política cambiaria de tipo de cambio fijo al fijar $t = 0$ y una política cambiaria totalmente flexible al fijar $t = 1$.

Suponiendo, por ejemplo, un mercado de cambios con solo dos activos x_1 y x_2 (que podrían ser ARS y USD) y un conjunto de reservas iniciales normalizadas a $\mathbf{R} = (1, 1)$, con:

$$\begin{aligned} A_{cs}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 2 \\ A_{cp}(x_1, x_2) = x_1 x_2 = 1 \end{aligned} \tag{22}$$

de modo tal que ambos pasen por el punto inicial de reservas $\mathbf{R} = (1, 1)$ y la construcción de la homotopía da como resultado:

$$A_{hom}(x_1, x_2) = (1-t)\frac{2}{x_1 + x_2} + t\frac{1}{x_1 x_2} = 1 \tag{23}$$

De este modo, para distintos valores de t el mercado de cambios podría adecuarse a la Figura 11.

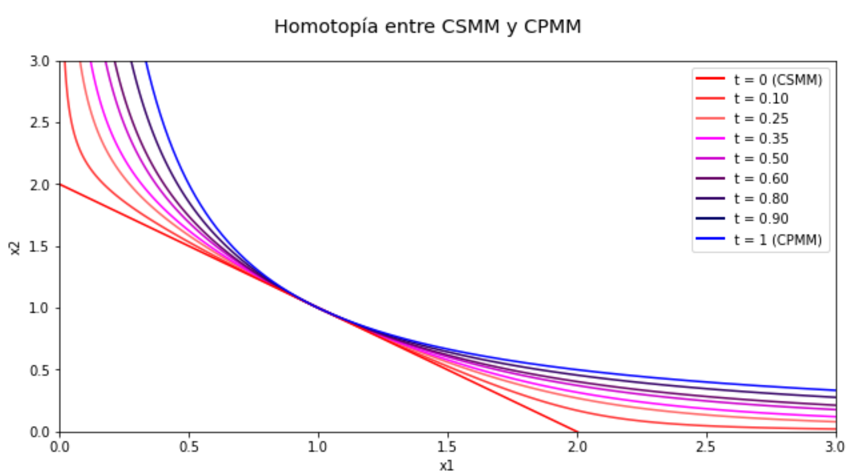

Figura 11: Elaboración propia en base a Port and Tiruviluamala (2022).

La fijación óptima de t dependerá de los objetivos amplios de la política monetaria. Sin embargo para limitar la discrecionalidad de la autoridad monetaria, podría fijarse t de forma algorítmica. En Angeris and Chitra (2020), los autores proponen fijar:

$$t(s) = \left| \frac{s - s_0}{M} \right|^K \qquad ; M = \max(s_0, 1 - s_0) \tag{24}$$

en que $s = \dfrac{a_1 x_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2}$ y s_0 representa el valor de s con las reservas iniciales. En este caso, el valor de t se reduce a:

$$t(s) = |2s - 1|^K \tag{25}$$

ya que $s_0 = \dfrac{1}{2}$. De este modo se puede fijar el valor de $K \geq 0$, tal que para mayores valores de K aumenta la estabilidad a niveles de reservas cercanos a los iniciales. Este tipo de fijación algorítmica de t, presenta un mercado de cambios de la forma observada en la Figura 12 en la que se observa claramente cómo para $K \to \infty$ más aumenta la estabilidad del AMM y por lo tanto más se acerca al caso de un CSMM. Mientras que, en el otro extremo, cuando $K \to 0$ entonces $t \to 1$ y el AMM se acerca al caso de un CPMM.

Sin embargo, la fijación de t al afectar el valor relativo del dinero en relación con el resto de las monedas y por lo tanto el valor de los transables y el tipo de cambio real, deberá responder en la mayoría de los casos al mandato dual de mantener estable la tasa de inflación alrededor de una tasa objetivo π^* a la vez que se mantiene el nivel de actividad y. Los anteriores objetivos suelen resumirse en el objetivo de maximizar una función de utilidad del banco central de la forma:

$$U = \lambda(y - y_n) - \frac{1}{2}(\pi - \pi^*)^2 \tag{26}$$

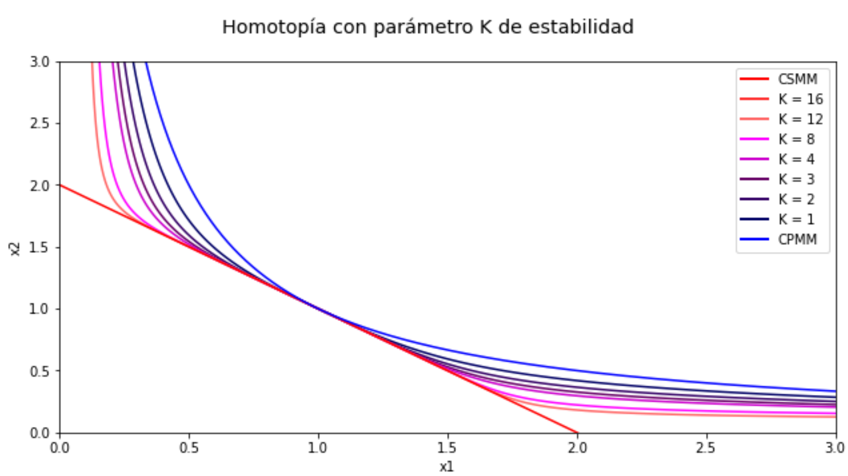

Figura 12: Elaboración propia en base a Port and Tiruviluamala (2022).

Las relaciones entre los objetivos de política monetaria y el AMM óptimo a ser utilizado en la implementación de una CBDC deben continuar siendo exploradas, sin embargo, es claro que un aumento de la estabilidad del AMM (determinado por un valor de t cercano a cero o alternativamente un valor relativamente alto de K) disminuye la volatilidad del tipo de cambio nominal y puede disminuir el efecto conocido como *pass-through*.

Además de la posibilidad de fijar el nivel de estabilidad del tipo de cambio a través del parámetro t o del parámetro K en (24), $A_{hom}(\cdot)$ permite que se lleve a cabo una "devaluación" a través de la modificación de los parámetros a_i de (10), modificando la pendiente del CSMM a ser usada en la construcción de (19).

Una ventaja adicional de la implementación de un AMM de función constante o CFMM es la posibilidad de implementar una comisión de cambio a la tasa $(1-\gamma)$ de modo tal que la condición para que un trade sea válido se transforme en:

$$\varphi(\mathbf{R}, \gamma\Lambda, \Delta) = \varphi(\mathbf{R}, 0, 0) \tag{27}$$

Suponiendo, por ejemplo, una comisión de $(1-\gamma) = 2\%$, tal que $\gamma = 0,98$. Las reservas en poder del AMM se modificarán de acuerdo a:

$$\mathbf{R}' \leftarrow \mathbf{R} - 0,98\Lambda + \Delta > \mathbf{R} - \Lambda + \Delta \tag{28}$$

El 2% cobrado de comisión a los traders que interactúen con el AMM podría ser transferido a las reservas de la autoridad monetaria o del tesoro. En este ejemplo, dado que la comisión es cobrada en la moneda a ser retirada del AMM en la cantidad $(1-\gamma)\Lambda$, el *smart contract* podría incluir la condición de que una comisión cobrada en pesos sea transferida al tesoro y una comisión cobrada en dólares sea transferida a la autoridad monetaria. De este modo, la utilización del mercado de cambios por parte de privados permitiría al banco central acumular reservas en dólares y al tesoro hacerse de pesos para realizar política fiscal o rescatar deuda del mercado.

Naturalmente, la fijación de una comisión puede disminuir el volumen total transado en el AMM, por lo tanto, la fijación de la comisión óptima será también un campo abierto de investigación.

5 AMMs en el modelo Neo-Keynesiano de pequeña economía abierta

Una vez implementado un AMM para el mercado de cambios de una CBDC es necesario investigar cómo interactúa este sistema de cambios con el resto de las variables macroeconómicas y, por tanto, cómo afecta al resto de la economía. En particular, la Argentina por su tamaño relativo en la economía mundial es clasificada como una pequeña economía abierta. Una pequeña economía abierta se caracteriza porque sus acciones no influyen en los precios internacionales de los bienes que comercia, es decir, no ejerce poder de mercado.

Otra característica principal de la economía es la existencia de rigideces nominales. El *framework* tradicional para la incorporación de rigideces nominales a un modelo de dos economías abiertas se deriva de Obstfeld and Rogoff (1995), en este, un conjunto continuo de consumidores y firmas locales y extranjeras comercian un conjunto también continuo de bienes diferenciados. Las rigideces surgen debido a que sólo un conjunto de las firmas pueden cambiar sus precios en un período de tiempo y, por lo tanto, fijan precios superiores a la suma del costo marginal más el *mark-up* deseado en caso de que cuenten con expectativas de inflación.

Las relaciones de intercambio entre ambas economías determinan los valores de equilibrio del ingreso, el consumo y el tipo de cambio en ambas economías y, a través de su función de reserva, el AMM ve modificadas sus reservas, tanto de divisas como de moneda doméstica, frente a cambios en estos valores. Vemos en la Figura 13 como se modifican las reservas de divisas en el AMM ante cambios en el tipo de cambio.

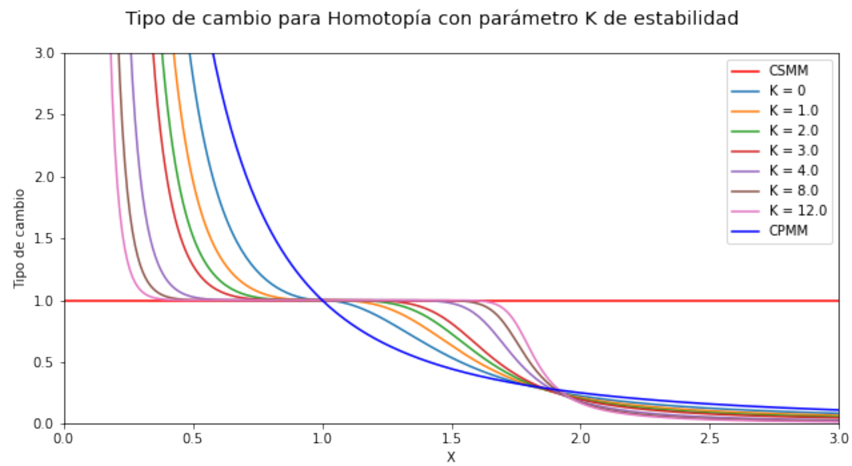

Figura 13: Las reservas de divisas en el AMM ante distintos tipos de cambio.

Una vez *log-linelizado* el modelo *New-Keynesian* puede resumirse en un conjunto de ecuaciones donde todas las variables expresan desvíos respecto del valor de estado estacionario:

$$\begin{aligned} [NKPC] \qquad & \pi_t = \beta \mathbb{E}_t (\pi_{t+1}) + k y_t + u_t \\ [IS] \qquad & y_t = \mathbb{E}_t (y_{t+1}) - \sigma(i_t - \mathbb{E}_t (\pi_{t+1})) + g_t \end{aligned}$$

Estas se conocen como la ***New-Keynesian Phillips Curve*** y curva IS dinámica. La primera relaciona la tasa de inflación con la inflación esperada y el *output-gap*, y_t. La segunda relaciona el *output gap* presente con el *output gap* esperado y la inflación esperada. Estos modelos se completan con una política monetaria (Gali and Monacelli, 2005; Cavallo and Ghironi, 2002) típicamente expresada por una regla de Taylor de la forma:

$$i_t = \phi_\pi \pi_t + \phi_y y_t$$

Asumiendo además que se cumple la paridad de tasas de interés y la ley del único precio:

$$\begin{aligned} i_t &= i_t^* + e_{t+1} - e_t \\ p_t &= p_t^* + e_t \end{aligned}$$

De esta última se deduce que $\pi_t = \pi_t^* + (e_t - e_{t-1})$ y que asumiendo estabilidad en el país extranjero puede reducirse a $\pi_t = e_t - e_{t-1}$.

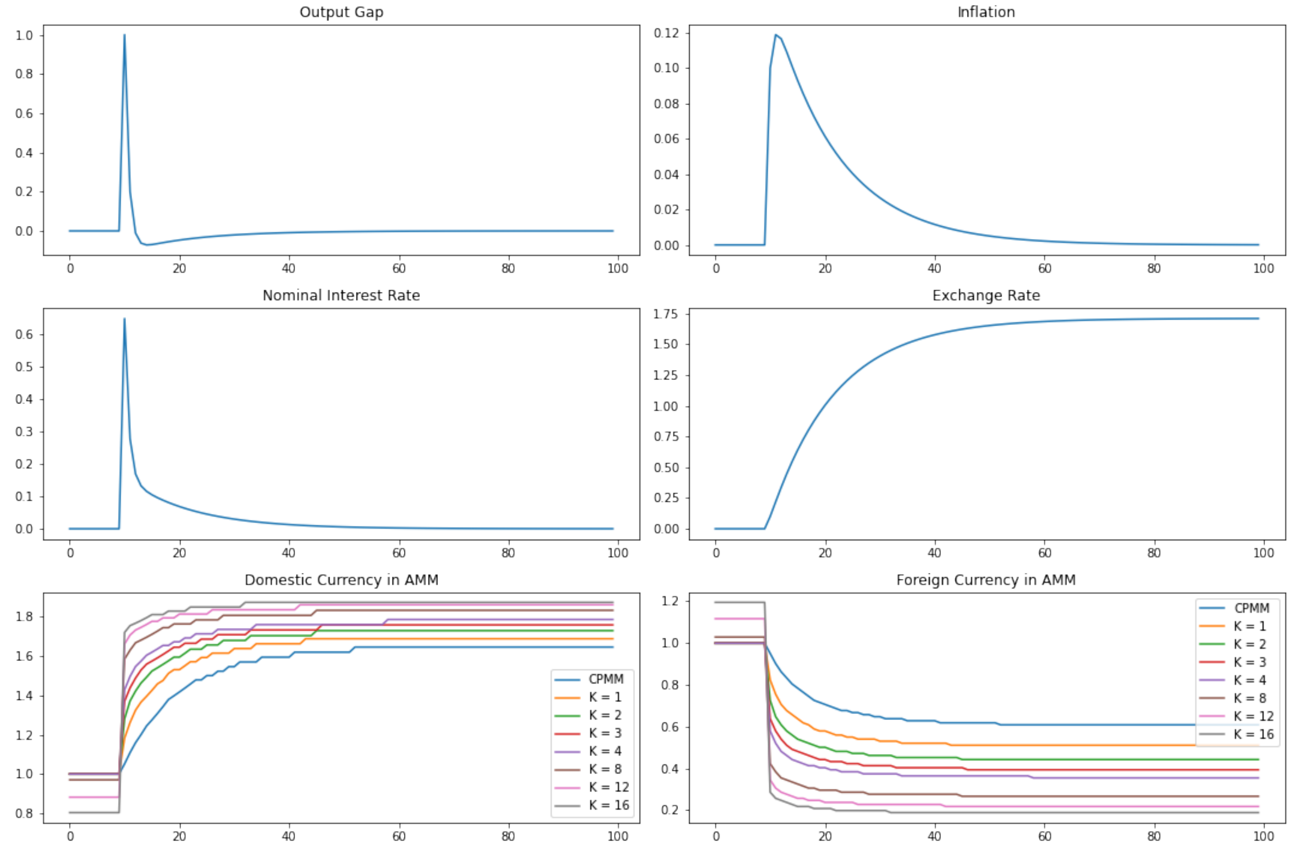

Figura 14: IRFs luego de un shock de costos.

Como último paso es necesario modelar el proceso de formación de expectativas, que en este caso serán sencillas:

$$\mathbb{E}_t\left(y_{t+1}\right) = a_1 y_t + a_2 \pi_t + a_3 i_t$$
$$\mathbb{E}_t\left(\pi_{t+1}\right) = b_1 y_t + b_2 \pi_t + b_3 i_t$$

Con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in (0.5, 0.9)$ y $a_3 = b_3 = 0.3$ reflejando una moderada inercialidad del *output gap* y la inflación. Así pueden construirse las funciones impulso-respuesta de las principales variables macroeconómicas ante un shock de costos (Figura 14).

Se observa como a mayores valores del parámetro K de estabilidad mayores son las pérdidas de reservas ante aumentos del tipo de cambio, lo cuál puede generar pérdidas de confianza en el sistema aún cuando estas reservas volvieran a su nivel original si el tipo de cambio también lo hiciera. Mitigar estos problemas exige una reparametrización de la función de reserva del AMM.

6 Conclusiones

La invención de la *blockchain* Ethereum en 2015 incorporó la programabilidad a las posibilidades de transferencia de valor a escala global originalmente creada por Bitcoin en 2008. Dicha programabilidad llevó a la creación de *tokens* de todo tipo, incluidas las *Stablecoins*, a través de los llamados smart contracts. La multitud de *tokens* existentes en la red Ethereum incentivó la creación de Market Makers algorítmicos que posibilitaron el intercambio en estos mercados descentralizados. Los AMMs, al ser de tipo algorítmico y su código poder ser auditado, aumentaron la seguridad, la transparencia y eliminaron la necesidad de una contraparte centralizada que posibilite el intercambio.

La mayoría de los AMMs implementados fueron los conocidos como de función constante (i.e. AMMs caracterizados totalmente por una función de reserva), en particular, de producto constante y de media constante. Dichos CFMMs tienen la propiedad de soportar todo el rango de precios relativos de modo tal de mantener la propiedad de liquidez permanente, es decir, que ajustan el precio de las distintas monedas para no quedarse con una cantidad nula de ningún activo. Estos se encuentran en el polo opuesto de los llamados market makers de suma constante, que soportan un único vector de precios relativos y pueden, por lo tanto, ser drenados de cualquier activo usando una cantidad finita de los activos restantes.

Con la popularidad creciente de las criptomonedas y la prueba de las ventajas del uso de la tecnología *blockchain* bancos centrales de todo el mundo comenzaron a explorar la posibilidad de mover sus economías hacia la eliminación del dinero físico y la implementación del dinero virtual (CBDCs). Si bien el concepto es aún novedoso, ya son muchos los autores que sostienen que la implementación de las CBDCs tendría grandes beneficios por reducción de los costos de transacción transnacionales, la eliminación del punto de falla en los sistemas financieros tradicionales e inclusive la disminución de la inconsistencia temporal en la aplicación de la política monetaria (Ward and Rochemont, 2019; Davoodalhosseini et al., 2020; Demaio et al., 2022).

Naturalmente la creación de monedas nacionales de tipo exclusivamente virtual generan un ámbito de aplicación adicional para los AMMs ya que estos últimos traen consigo mejoras en los mecanismos de determinación del precio de una moneda respecto a otras y la posibilidad de extender la liquidez total mediante las propiedades de liquidez permanente presentes en los AMMs de producto o media constante sin perder la posibilidad de realizar política monetaria. Inclusive, la fijación de un tasa de comisión distinta de cero daría a la autoridad monetaria la posibilidad de adquirir de forma pasiva reservas a lo largo del tiempo mientras el AMM interactúa con el mercado.

Creaciones como la homotopía entre CSMMs y CPMMs creada por Angeris and Chitra (2020) brinda herramientas para la implementación de Market Makers algorítmicos más adecuados para el uso de las CBDCs, en los que se aumenta la estabilidad de precios cuando las reservas de ambos activos se encuentran en niveles cercanos a los inicialmente determinados por la autoridad monetaria que implementa el AMM pero sin perder la propiedad de liquidez permanente. Los autores inclusive proponen un algoritmo de fijado dinámico del parámetro de estabilidad de modo tal que se modifique drásticamente cuando las cantidades a intercambiar drenarían al AMM de una cantidad significativa de cualquiera de sus activos.

Investigaciones futuras en el campo de las CBDCs y, en particular, acerca de la implementación de mercados de cambios de CBDCs, deberán indagar sobre la parametrización óptima de este tipo de construcciones que busquen cumplir de la forma más eficiente posible los mandatos, tradicionalmente duales, de preservar la estabilidad monetaria y atender al objetivo de pleno empleo teniendo en cuenta su interacción con las demás variables macroeconómicas.

La implementación de soluciones al problema del mercado de cambios que eliminen a los intermediarios centralizados y el riesgo de punto de falla que estos llevan consigo, sean en forma de AMMs o de otro tipo dependerá, del grado de eficiencia que muestren estos protocolos a medida que el volumen total que se transa en los mismos aumente con el tiempo. En cualquier caso su existencia y la innovación en los mismos, introducen un aspecto de competencia que, sin duda, tiene beneficios sobre la eficiencia económica.

Referencias

Adams, H. (2018). Uniswap whitepaper. *https://hackmd.io/@HaydenAdams/ HJ9jLsfTz*.

Adams, H., Zinsmeister, N., Salem, M., Keefer, R., and Robinson, D. (2021). Uniswap v3 core. *Tech. rep., Uniswap, Tech. Rep.*

Angeris, G. and Chitra, T. (2020). Improved price oracles: Constant function market makers. In *Proceedings of the 2nd ACM Conference on Advances in Financial Technologies*, pages 80–91.

Angeris, G., Kao, H.-T., Chiang, R., Noyes, C., and Chitra, T. (2019). An analysis of uniswap markets. *arXiv preprint arXiv:1911.03380*.

Bruhwiler, P., Cachin, C., Zanolini, L., and Micic, J. (2021). A concurrent dex on cardano. *https://crypto.unibe.ch/archive/theses/2021.bsc.peter.bruehwiler.pdf*.

Buterin, V. (2014). Ethereum whitepaper. *Ethereum. URL: https://ethereum.org*.

Cavallo, M. and Ghironi, F. (2002). Net foreign assets and the exchange rate: Redux revived. *Journal of Monetary Economics*, 49(5):1057–1097.

Davoodalhosseini, M., Rivadeneyra, F., and Zhu, Y. (2020). Cbdc and monetary policy. Technical report, Bank of Canada. https://www.bankofcanada.ca/2020/02/staff-analytical-note-2020-4/.

Demaio, A., Manuali, L., and Neder, E. (2022). Banco central y criptomonedas. en busca de una menor dominancia fiscal. *Arnoldshain Seminar XVII. Vila-real, Castellón and Alicante, Spain*.

Fissore Navarro, J. C. (2021). Consideraciones sobre las criptomonedas estables o "stablecoins". *Trabajo final de grado. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba*.

Gali, J. and Monacelli, T. (2005). Monetary policy and exchange rate volatility in a small open economy. *The Review of Economic Studies*, 72(3):707–734.

Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system. *Decentralized Business Review*, page 21260.

Obstfeld, M. and Rogoff, K. (1995). Exchange rate dynamics redux. *Journal of political economy*, 103(3):624–660.

Port, A. and Tiruviluamala, N. (2022). Mixing constant sum and constant product market makers. *arXiv preprint arXiv:2203.12123*.

Ward, O. and Rochemont, S. (2019). Understanding central bank digital currencies (cbdc). *Institute and Faculty of Actuaries*, pages 1–52.